

# Exponenciális és logaritmikus kifejezések, egyenletek

## 1. Hatványozási azonosságok

1.1 Számítsd ki a következő hatványok pontos értékét!

- a)  $8^{\frac{1}{3}}$       b)  $4^{\frac{5}{2}}$       c)  $25^{\frac{1}{2}}$       d)  $27^{\frac{2}{3}}$       e)  $32^{\frac{3}{5}}$       f)  $9^{\frac{3}{2}}$   
g)  $9^{0,5}$       h)  $16^{-0,25}$       i)  $81^{0,75}$       j)  $36^{1,5}$       k)  $4^{-2,5}$       l)  $49^{-1,5}$

1.2 A következő kifejezéseket úgy alakítsd át, hogy ne tartalmazzanak gyökjelet!

- a)  $\sqrt[3]{x^2}$       b)  $\sqrt[4]{a^3}$       c)  $\sqrt{a^5}$       d)  $\frac{1}{\sqrt[3]{a^5}}$       e)  $\frac{1}{\sqrt{a}}$       f)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$

1.3 Az alábbi kifejezéseket úgy alakítsd át, hogy sem negatív, sem törtekitevőt ne tartalmazzanak!

- a)  $x^{\frac{2}{3}}$       b)  $a^{\frac{3}{4}}$       c)  $b^{\frac{1}{4}}$       d)  $(3a)^{\frac{2}{3}}$       e)  $3a^{\frac{2}{3}}$       f)  $c^{\frac{1}{3}}$

## 2. A logaritmus fogalma

2.1 A következő kifejezéseket írd fel egyszerűbb alakban!

- a)  $2^{\log_2 5} =$       b)  $7^{\log_7 9} =$       c)  $8^{\log_8 3} =$       d)  $10^{\lg 4} =$       e)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6} =$       f)  $10^{\lg 7} =$

2.2 A logaritmus fogalma segítségével írd át más alakba a következő egyenlőségeket!

- a)  $2^3 = 8$       b)  $3^2 = 9$       c)  $5^4 = 625$       d)  $4^{\frac{1}{2}} = 2$       e)  $16^{\frac{1}{4}} = 2$       f)  $64^{\frac{2}{3}} = 16$

- g)  $5^{-1} = \frac{1}{5}$       h)  $8^{-2} = \frac{1}{64}$       i)  $7^0 = 1$       j)  $4^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$       k)  $81^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$

2.3 Határozd meg az alábbi logaritmusok értékét!

- a)  $\log_4 16 =$       b)  $\log_3 9 =$       c)  $\log_7 7 =$       d)  $\log_2 32 =$       e)

$\log_2 \frac{1}{8} =$

- f)  $\log_5 \frac{1}{25} =$       g)  $\log_8 1 =$       h)  $\log_4 2 =$       i)  $\log_9 \frac{1}{81} =$       j)  $\log_9 3 =$

2.4 Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

a)  $3^{1+\log_3 5} =$

b)  $4^{2+\log_4 3} =$

c)  $2^{1+4\log_2 3} =$

d)  $4^{2-\log_4 5} =$

e)  $5^{\log_5 3 + \log_5 2} =$

f)  $6^{\log_6 7 - \log_6 2} =$

### 3. A logaritmus azonosságai

3.1 Írd fel rövidebb alakban a következő kifejezéseket!

a)  $2(3 \log_k x + 5 \log_k y) - 4 \log_k z =$

b)  $7 \log_k a + \frac{3 \log_k x + 2 \log_k y + 5 \log_k z}{4} =$

c)  $\frac{5 \log_k a + \log_k b}{3} + \frac{2 \log_k x + 3 \log_k y}{5} =$

d)  $\frac{\lg 2 + \lg a - \lg c}{3} + \frac{2(\lg 3 + \lg x - 3 \lg y - 4 \lg z)}{5} =$

3.2 Határozd meg az alábbi kifejezések értékét!

a)  $5^{-1} \cdot 3^{\log_3 8} \cdot \lg \sqrt[5]{1000} =$

b)  $7^{7 \log_7 2 - \log_7 5} \cdot \lg \sqrt[10]{10} \cdot \log_5 \sqrt[3]{25} =$

### 4. Exponenciális egyenletek

4.1 Oldd meg a következő egyenleteket!

a)  $7^{x+1} - 6 \cdot 7^x - 5 \cdot 7^{x-1} = 14$

b)  $7^{x+1} - 6 \cdot 7^x + 5 \cdot 7^{x-1} = 14$

c)  $3^{x-2} + 4 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 4$

d)  $3^x - 3^{x-2} = 24$

4.2 Oldd meg a következő egyenleteket!

a)  $7 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+3} = 3^{x+2} - 3^{x+1}$

b)  $25 \cdot 2^x = 8 \cdot 5^{x-1}$

c)  $16 \cdot 2^{x-1} = 9 \cdot 3^{x+1}$

d)  $8^{5x-3} \cdot 8^{-2x+1} = 8^{3x+2} \cdot 8^{-4x+4}$

4.3 Oldd meg a következő egyenleteket!

a)  $4^{x+1} + 2^{2x+2} - 12 = 0$

b)  $2^{2x-3} + 4^{x-1} - 24 = 0$

c)  $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$

d)  $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$

## 5. *Logaritmusos egyenletek*

5.1 Oldd meg a következő egyenleteket!

a)  $\lg(x+1) = \frac{\lg(6-2x)}{2}$

b)  $2\lg(x-4) - \lg 4 = \lg(2x-11)$

c)  $2[\lg(x-2) + \lg 5] = 2 + \lg(x+46)$

d)  $\frac{\lg(3x-5)}{\lg(2x-3)} = 1$

e)  $\frac{\lg(3x-5)}{\lg(2x-3)} = 2$

## 6. *Az exponenciális-, és a logaritmusfüggvény*

6.1 Ábrázold és jellemezd az alábbi függvényeket!

a)  $x$  a  $2^x$

b)  $x$  a  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

c)  $x$  a  $\log_2 x$

d)  $x$  a  $\log_{\frac{1}{2}} x$

# Koordinátageometria

## 1. Műveletek vektorokkal

1.1 Egy téglalap csúcsai legyenek A, B, C, D. Rajzold meg a következő vektorokat!

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$    b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$    c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$    d)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$    e)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$   
f)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$    g)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$    h)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$    i)  $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$

1.2 Rajzolj tetszőleges (nullvektortól különböző)  $a$  és  $b$  vektort! Szerkeszd meg az alábbi vektorokat!

- a)  $2a$       b)  $-2a$       c)  $1,5a$       d)  $3a$       e)  $\frac{2}{3} \vec{a}$   
f)  $a + 2b$       g)  $a - 2b$       h)  $0,5\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$       i)  $\frac{a+b}{2}$

1.3 Egy C pont helyvektora  $c$ , egy tetszőleges P ponté  $p$ . Határozd meg a P pont C-re vonatkozó tükörképének helyvektorát!

1.4 Rajzold meg az alábbi helyvektorokat a derékszögű koordináta-rendszerben, majd számítsd ki a hosszúságukat!

- a) (4; 2)      b) (-5; 3)      c) (-6; -3)      d) (4; -2)      e) (0; 0)      f)  $(\sqrt{3}; 0)$

1.5 Egyenlő szárú háromszög alapja 10, magassága 6 hosszúságegység. Határozd meg a háromszög csúcsainak helyvektorait, ha úgy helyezük el a koordináta-rendszerben, hogy a kezdőpont az alap egyik végpontjába van, és az alap az x tengelyre illeszkedik. Hány megoldás van?

1.6 Rajzold meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeknek

- a) az abszcisszája 0.      b) az ordinátája 0.      c) az abszcisszája 2.  
d) az ordinátája 4.      e) az abszcisszája -3.      f) az ordinátája -5.  
g) az abszcisszája és az ordinátája egyenlő.

1.7 Az  $a(2; 3)$ ,  $b(4; -5)$  és  $c(-3; 8)$  vektorokat  $90^\circ$ -kal elforgatjuk. Határozd meg az elforgatott helyvektorok koordinátáit! Írd fej azokat a vektorokat is, amelyek az eredeti vektorokból  $-90^\circ$ -os elforgatással adódnak!

1.8 Legyen az  $a(3; 5)$ ,  $b(-4; 2)$  és  $c(-2; -5)$ . Számítsd ki a következő vektorok koordinátáit!

a)  $a + b$       b)  $a - c$       c)  $a - 2b$       d)  $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$       e)  $\frac{a + b + c}{3}$

Ábrázold a kapott helyvektorokat!

1.9 Egy csónak sebessége állóvízben  $12 \frac{km}{h}$ . A csónak  $3 \frac{km}{h}$  sebességű folyóban a partra merőlegesen indul.

a) Szerkessze meg a csónak eredő sebességét, ha 1 cm-nek vesszük a  $3 \frac{km}{h}$  sebességvektor hosszát!

b) Számítsa ki az eredő sebesség nagyságát!

1.10 Három kutya egyenként  $120 N$  erővel húz egy szánt. A szomszédos kutyák kötelei  $30^\circ$ -os szöget zárnak be. Szerkessze meg az eredő erőt!

1.11 Adott az  $a (2; 3)$  és  $b (1; 4)$  vektor.

a) Szerkessze meg a  $v (7; 6)$  vektor  $a$ -val és  $b$ -vel párhuzamos összetevőit!

b) Számítással határozza meg az összetevők koordinátáit!

1.12 Egy katicabogár az  $A (2; 4)$  pontból 7 másodpercen át egyenes vonalú egyenletes mozgást végzett, 1 s múlva a  $B (3; 3)$  pontban volt.

a) Írja fel a sebességvektorát!

b) Mekkora utat tett meg összesen a bogár 7 másodperc alatt?

## 2. Vektorok skaláris szorzata

2.1 Szánkót húz egy ifjú apa  $110 N$  egyenletes erővel, miközben a kötélt  $30^\circ$ -os szöget zár be a vízszintessel. Mekkora munkát végez, ha 150 métert húzza így gyermekét? (A végzett munka az erő- és az elmozdulás-vektor skaláris szorzata.)

2.2 Mekkora az egyenlő (de nem nulla) hosszúságú  $a$  és  $b$  szöge, ha az  $\vec{a} + 2b$  és az  $5\vec{a} - 4b$  egymásra merőleges vektorok?

2.3 Határozd meg az  $a$  és  $b$  egységvektorok által bezárt szöget, ha  $\vec{a} + 3b \perp 5\vec{a} - 4b$  !

2.4 Két egymással  $60^\circ$ -os szöget bezáró vektor skaláris szorzata 4. Ha az egyik vektor hossza a másik kétszerese, akkor

a) milyen hosszúak a vektorok?

- b) mekkora a két vektor összege?
- c) mekkora a két vektor különbsége?

2.5 Adott két vektor:  $a(4; 3)$ ,  $b(-1; 2)$ . Ábrázold a két vektort koordinátarendszerben

- a) Mi az  $a \cdot b$  szorzat értéke?
- b) Határozd meg a vektorok hosszát!
- c) Mekkora a két vektor hajlásszöge?

2.6 Határozd meg az  $a(8; -3)$ ,  $b(2; 6)$  vektorok hajlásszögét!

2.7 Egy háromszög csúcsai:  $A(2; 0)$ ,  $B(5; 4)$ ,  $C(-1; 3)$ . Mekkora a háromszög szögei?

### 3. **Felezőpont, harmadoló pont**

- 3.1 Számítsd ki az  $A(0; -1,6)$  és  $B(2,8; 4)$  pontok által meghatározott szakasz felezőpontjának koordinátáit!
- 3.2 Legyen  $\vec{OA}(3; 7)$ ,  $\vec{OB}(9; -1)$ ! Határozza meg  $\vec{AB}$ -t, valamint az  $AB$  szakasz felezőpontjához és harmadoló pontjaihoz az  $O$ -ból induló vektorok koordinátáit!

### 4. **Háromszög súlypontja**

- 4.1 Egy háromszög csúcsai:  $A(2; 0)$ ,  $B(5; 4)$ ,  $C(-1; 3)$ . Határozd meg a súlypontjának a koordinátáit!

### 5. **Az egyenes egyenlete**

- 5.1 Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az origón és illeszkedik az  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$  koordinátájú pontra!

5.2 Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely

- a) áthalad az  $(1; 3)$  ponton és normálvektora  $(2; -1)$ ?
- b) áthalad a  $(3; -2)$  ponton és irányvektora  $(-4; 1)$ ?
- c) áthalad a  $(2; 3)$  és  $(-1; -4)$  pontokon?

Ábrázold a fenti egyeneseket!

- 5.3 Állapítsd meg, hogy rajta van-e a  $2x - y = 3$  egyenesen az  $(1; 1)$  pont!

5.4 Mely pontokban metszi a koordináta-rendszer tengelyeit az  $x - 5y = -10$  egyenletű egyenes? Ábrázold az egyenest!

5.5 Adj meg 2 pontot, amelyek illeszkednek a  $-x + 3y = 5$  egyenesre!

## 6. Egyenesek metszéspontja

6.1 Ábrázold az egyeneseket, és számítsd ki a két egyenes metszéspontjának koordinátáit!

a:  $2x - 3y - 12 = 0$

b:  $5x + 4y - 7 = 0$

6.2 Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

a:  $9x - 6y + 54 = 0$

b:  $x + 4y - 8 = 0$

c:  $11x + 2y - 46 = 0$

Számítsd ki a kerületét!

6.3 Számítsd ki a  $P(-3; 1)$  pont és az  $e: 3x + 5y - 15 = 0$  egyenes távolságát!

6.4 Írd fel a  $P(-2; 5)$  és  $Q(6; 7)$  pontok által meghatározott szakasz felező merőlegesének egyenletét!

6.5 Számítsd ki a  $P(-1; 3)$  pont és a  $4x - 3y = 12$  egyenletű egyenes távolságát!

6.6 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái  $A(-2; 0)$ ,  $B(3; 3)$  és  $C(-2; 4)$ . Hol metszi a  $C$  csúcsból induló magasságvonal a koordináta tengelyeket?

6.7 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái  $A(-1; 4)$ ,  $B(-3; -2)$  és  $C(2; 1)$ . Mekkora darabokat vág le a  $C$  csúcsból induló súlyvonal a koordinátatengelyekből?

6.8 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái  $A(-3; 1)$ ,  $B(3; -1)$  és  $C(2; 3)$ . Írja fel a súlyvonalak egyenletét, és határozza meg a súlyvonalak közös pontját!

6.9 Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái  $(4; 0)$ ,  $(-3; -1)$  és  $(-5; 6)$ . Írd fel az oldalfelező merőlegesek egyenletét, és határozd meg a merőlegesek közös pontját!

## 7. A kör egyenlete

7.1 Egy kör középpontja  $C(1; -5)$ , sugara 5 egység. Írd fel a kör egyenletét!

7.2 Egy kör egyik átmérőjének két végpontja:  $A(-1; -1)$  és  $B(7; 5)$ . Írd fel a kör egyenletét!

7.3 Rajzold le koordináta-rendszerbe azt a kört, melynek középpontja a  $C(-3; 5)$  pont és érinti az  $y$  tengelyt! Határozd meg a sugarát! Írd fel a kör egyenletét!

7.4 A következő másodfokú kétismeretlenes egyenletek közül válaszd ki azokat, amelyek kör egyenletei lehetnek, határozd meg a kör középpontját és sugarát!

a)  $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 2xy + 5x - 3y - 4 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 35 = 0$

d)  $-2x^2 - 2y^2 + 4x + 8y + 22 = 0$

7.5 Határozd meg az  $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$  egyenletű körrel koncentrikus (azonos középpontú) 5 egység sugarú kör egyenletét!

7.6 Döntsd el, hogy rajta vannak-e az alábbi pontok az  $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$  egyenletű körön!

a)  $A(10; 24)$                       b)  $B(14; 7)$

7.7 Mi annak a körnek az egyenlete, ami áthalad a  $P(1; 2)$  és az  $R(4; -3)$  pontokon, és a középpontja az  $y = 3x - 19$  egyenletű egyenesen van?

## 8. Kör és egyenes metszéspontja

8.1 Számítsd ki az  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$  egyenletű kör és az  $y = x - 7$  egyenletű egyenes metszéspontjainak koordinátáit!

8.2 Milyen hosszúságú húrt vág ki az  $y = 2x + 1$  egyenletű egyenesből az  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$  ?

8.3 Az  $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$  egyenletű körhöz az  $P(10; 24)$  pontjában érintőt húzunk. Írja fel az érintő egyenletét!

8.4 Az  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$  egyenletű körnek van-e olyan pontja, mely egyenlő távolságra van a  $(-3; 2)$  és  $(1; 0)$  koordinátájú pontoktól?



## Trigonometria

### 1. Szögfüggvények általános értelmezése, azonosságok

1.1 Válaszd ki az alábbi állítások közül az igazakat!

$$\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$$

$$\cos 520^\circ = \cos 20^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

$$\sin 840^\circ \leq 0$$

$$\cos 150^\circ \geq 0$$

$$\sin 810^\circ = 0$$

$$\cos 1080^\circ = 1$$

1.2 Mely valós számokra teljesül, hogy  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ ?

1.3 Mely valós számokra teljesül, hogy  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ?

1.4 Mely valós számokra teljesül, hogy  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ ?

### 2. Szinusz-, koszinusz- és tangensfüggvény ábrázolása és jellemzése

2.1 Ábrázold és jellemezd a tanult trigonometrikus függvényeket!

### 3. Számolások derékszögű háromszögben

3.1 Egy hegy északi lejtője 5 km hosszú és  $30^\circ$ -os szöget zár be az alapsíkkal. A déli lejtő hossza 8 km. Milyen magas a hegy, és milyen meredek a déli lejtő?

3.2 Egy 3 méter hosszú, függőleges falhoz támasztott létra lába a faltól 50 cm-re van.

a) Mekkora szöget zár be a létra a fallal?

b) Milyen magasan van a falhoz támasztva?

c) Legfeljebb milyen távol lehet a lába a faltól, ha tudjuk, hogy biztonsági okokból a létrának a talajjal legalább  $70^\circ$ -os szöget kell bezárnia?

3.3 Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 26 cm és 42 cm. A hosszabb alapon fekvő szögei  $40^\circ$  és  $60^\circ$

a) Mekkora a trapéz szárjai?

b) Mekkora a trapéz kerülete és területe?

### 4. Szinusztétel, koszinusztétel

4.1 Egy háromszögben  $a = 7$ ,  $b = 6$  és  $\gamma = 40^\circ$ . Mekkora lehet  $c$ ,  $\alpha$   $\beta$ ?

- 4.2 Egy kikötőből egymástól  $109^\circ$ -ban eltérő irányban indul el két hajó. Az egyik sebessége  $46 \frac{km}{h}$ , a másiké  $62 \frac{km}{h}$ . Milyen messze lesz egymástól a két hajó 2 óra 20 perc múlva?
- 4.3 Egy kismotoros repülőgép a felszállás óta 40 km-t tett meg déli irányban, majd  $15^\circ$ -ot fordult nyugat felé, és megtett újabb 32 km-t. Milyen messze van ekkor a kiindulási helyétől?
- 4.4 Egy háromszög egyik szöge  $64^\circ$ , ennek a szögnek a felezője 12 cm, a szög csúcsából kiinduló magasság hossza pedig 10 cm. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

## 5. *Trigonometrikus egyenletek*

5.1  $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.2  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

5.3  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 3,2$