2858. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi;\quad x_2=\frac{3\cdot\pi}{8}+l\cdot\pi;\quad x_3=-\frac{\pi}{8}+m\cdot\pi$. Osszuk el az egyenletet a nem nulla $\cos^4 x$-szel! Majd vegyük figyelembe, hogy $\frac{1}{\cos^4 x}=(1+\mathrm{tg}^2\,x)^2$, ezt felhasználva kapjuk, hogy: $\mathrm{tg}^4 x-4\cdot\mathrm{tg}^3 x+4\cdot\mathrm{tg}^2 x-1=0$; ezt alkalmas módon alakítsuk szorzattá. Azt kapjuk, hogy $(\mathrm{tg}\,x-1)^2\cdot(\mathrm{tg}^2 x-2\cdot\mathrm{tg}\,x-1)=0$.

2859. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;\quad x_2=\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi$. Szorozzunk a nevezővel, a $\sin^2 x$ -et alakítsuk át $\cos^2 x$-re, majd rendezzük nullára az egyenletet, ezután alakítsuk szorzattá!

IV

2860. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;\quad x_2=\frac{2\cdot\pi}{2}+l\cdot 2\cdot\pi;\quad x_3=-\frac{2\cdot\pi}{3}+m\cdot 2\cdot\pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2861. $x_1=k\cdot\pi;\quad x_2=\frac{\pi}{4}+l\cdot 2\cdot\pi;\quad x_3=\frac{3\cdot\pi}{4}+m\cdot 2\cdot\pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot, csak most a $\cos^2 x$-et alakítjuk át $\sin^2 x$ segítségével.

2862. $x\approx -0{,}3218+k\cdot\pi$. A jobb oldalon emeljünk ki $\sin x$-et, vegyük észre amit ezután észre kell venni. Majd az egyenletet tangensre alakíthatjuk át, ha $\cos x$-szel osztunk.

2863. $x_1=k\cdot\pi;\quad x_2=\frac{\pi}{2}+l\cdot 2\cdot\pi$. Rendezzünk nullára, majd alakítsuk szorzattá az egyenletet!

2864. $x_1=k\cdot 2\cdot\pi;\quad x_2=\frac{\pi}{4}+l\cdot\pi$. Alakítsuk át a tangenst, szorozzunk koszinusszal, rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

2865. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi;\quad x_2=\pi+l\cdot 2\cdot\pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2866. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad x_2=l\cdot 2\cdot\pi$. Rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá, például úgy, hogy $(\sin x-1)$-et kiemelünk.

2867. $x_1=\pi+k\cdot 2\cdot\pi;\quad x_2=\frac{\pi}{2}+l\cdot 2\cdot\pi$. Rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá úgy, hogy $(1+\cos x)$-et emeljünk ki!

2868. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi;\quad x_2=\frac{\pi}{6}+l\cdot 2\cdot\pi;\quad x_3=\frac{5\cdot\pi}{6}+m\cdot 2\cdot\pi$. Alakítsuk át a kotangenst, szorozzunk szinusszal, majd rendezzük nullára az egyenletet! Ezután alakítsuk szorzattá, például úgy, hogy kiemeljük a $(\sin x+\cos x)$-et.

2869. $x_1=\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi;\quad x_2=-\frac{2\cdot\pi}{3}+l\cdot 2\cdot\pi$. Alakítsuk át a tangenst, szorozzunk a nevezőkkel, egyszerűsítsünk, majd a nullára rendezett egyenletet alakítsuk szorzattá!

2870. $x_1=k\cdot\pi;\quad x_2=\frac{\pi}{3}+l\cdot 2\cdot\pi;\quad x_3=-\frac{\pi}{3}+m\cdot 2\cdot\pi;\quad x_4=\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\cdot\pi;$ $x_5=\frac{5\cdot\pi}{6}+p\cdot 2\cdot\pi$. Az első két tagból emeljünk ki $2\cdot\sin x$-et, ezután láthatjuk, hogy szorzattá alakíthatjuk a bal oldalt, ha $\left(\sin x-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{tg}\,x\right)$-et kiemelünk.

2871. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi;\quad x_2=\frac{\pi}{3}+l\cdot\pi;\quad x_3=-\frac{\pi}{3}+m\cdot\pi$. Rendezzük nullára az egyenletet. Az első két tagból emeljünk ki $\mathrm{tg}^2 x$-et, a második két tagból emeljünk ki (-3)-at! Ezután láthatjuk, hogy a bal oldalt szorzattá alakíthatjuk.

IV

2872. Nincs megoldása az egyenletnek a valós számok halmazán. Hozzuk az egyenletet a következő alakra: $\mathrm{tg}^2 x \cdot (\mathrm{tg}\, x + 1)^2 + (\mathrm{tg}\, x - 1)^2 = 0$. Ez akkor és csak akkor igaz, ha az egyes tagok külön-külön nullák.

2873. $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{4 \cdot \pi}{5} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = -\frac{4 \cdot \pi}{5} + p \cdot 2 \cdot \pi$; $x_6 = \frac{2 \cdot \pi}{5} + q \cdot 2 \cdot \pi$; $x_7 = -\frac{2 \cdot \pi}{5} + r \cdot 2 \cdot \pi$. Az első két tagból emeljük ki a $\cos^2 x$-et. Ezután láthatjuk, hogy szorzattá alakíthatjuk az egyenletet, ha kiemelünk $(\cos x - 1)$-et: $(\cos x - 1) \cdot \left(8 \cdot \cos^2 x \cdot (\cos x + 1) - 1\right) = 0$. A második tényező további szorzattá alakítása: $8 \cdot \cos^3 x + 8 \cdot \cos^2 x - 1 = (8 \cdot \cos^3 x + 1) + 8 \cdot \cos^2 x - 2 =$

$$= 8 \cdot \left(\cos^3 x + \frac{1}{2^3}\right) + 8 \cdot \left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 8 \cdot \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\cos^2 x - \cos x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + 8 \cdot \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = \ldots$$ Folytassuk!

2874. $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. Alakítsuk át a kotangenst és a tangenst a definícióikat használva! Emeljünk ki a bal oldalon $(\sin x + \cos x)$-et! Majd ugyanezt végezzük el a jobb oldalon is, ezután rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

2875. $x_1 \approx 2{,}4754 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsuk át a $\sin^2 x$-et $\cos^2 x$ segítségével! Majd rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá! $\cos x + \sqrt{\sin x} = \cos^2 x - \sin x$, $\left(\cos x - \sqrt{\sin x}\right)\left(\cos x + \sqrt{\sin x}\right) - \left(\cos x + \sqrt{\sin x}\right) = 0$. A trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldásánál célszerű felvázolni a megfelelő függvény grafikonját, vagy alkalmazni a szögfüggvény egységkörös definícióját.

Trigonometrikus egyenlőtlenségek I. rész

Bevezető feladatok

2876. *a)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
c) $0 + k \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. *d)* $0 + k \cdot \pi < x \le \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

2877. *a)* $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
c) $-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < 0 + k \cdot \pi$. *d)* $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < \pi + k \cdot \pi$.

2878. *a)* $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
c) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *d)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. Másképpen: $\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{13 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2879. *a)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot2\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot2\cdot\pi.$ *b)* $0+k\cdot2\cdot\pi\le x<\frac{\pi}{3}+k\cdot2\cdot\pi;$ $\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot2\cdot\pi<x\le2\cdot\pi+k\cdot2\cdot\pi.$ Rövidebben: $\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot2\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{3}+k\cdot2\cdot\pi.$
c) $\frac{\pi}{6}+k\cdot2\cdot\pi\le x\le\frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot2\cdot\pi.$ *d)* $0+k\cdot2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\cdot2\cdot\pi;$ $\frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot2\cdot\pi<x<2\pi+k\cdot2\cdot\pi.$ Rövidebben: $-\frac{\pi}{6}+k\cdot2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\cdot2\cdot\pi.$

2880. *a)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi\le x\le\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi.$ *b)* $0+k\cdot2\cdot\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi;$ $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi<x<2\cdot\pi+k\cdot2\cdot\pi$ vagy $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi<x<\frac{9\cdot\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi.$
c) $0+k\cdot2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi;$ $\frac{7\cdot\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi\le x\le2\cdot\pi+k\cdot2\cdot\pi$ vagy $-\frac{\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi.$ *d)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{4}+k\cdot2\cdot\pi.$

2881. *a)* $0+k\cdot\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi.$ *b)* $-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi.$
c) $\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi.$ *d)* $-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi.$

2882. *a)* $\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x<\pi+k\cdot\pi.$ *b)* $0+k\cdot\pi<x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi.$ *c)* $0+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi.$
d) $0+k\cdot\pi<x\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi.$

Alapvető feladatok

2883. *a)* $x=k\cdot2\cdot\pi.$ *b)* $x=\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot2\cdot\pi.$ *c)* Nincs megoldása a valós számok halmazán.
d) Nincs megoldása a valós számok halmazán.

2884. *a)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot2\cdot\pi\le x\le\frac{2\pi}{3}+k\pi.$ *b)* $\frac{\pi}{8}+k\cdot\pi<x<\frac{3\cdot\pi}{8}+k\cdot\pi.$
c) $k\cdot\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}.$ *d)* $-\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}<x\le-\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}.$

2885. *a)* $-\frac{\pi}{2}+k\cdot2\cdot\pi<x<\pi+k\cdot2\cdot\pi.$ *b)* $\frac{5\cdot\pi}{8}+k\cdot\pi<x<\frac{7\cdot\pi}{8}+k\cdot\pi.$

2886. *a)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\le x\le\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi.$ *b)* $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\frac{5\cdot\pi}{4}+k\cdot\pi.$

2887. *a)* $-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi.$ *b)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;$
$-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x<-\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi.$

2888. *a)* $0+k\cdot2\cdot\pi\le x\le\pi+k\cdot2\cdot\pi.$ Alakítsuk át az egyenletet: $|\sin x|=\sin x$, ebből következik, hogy $\sin x\ge0.$ *b)* $\pi+k\cdot2\cdot\pi<x\le2\cdot\pi+k\cdot2\cdot\pi.$ Az egyenlet átalakítása és a következtetés után: $\sin x\le0.$ *c)* $-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi<x\le0+k\cdot\pi.$

IV

2889. *a)* Minden x valós számra értelmezett a kifejezés, tehát az értelmezési tartomány a valós számok halmaza. *b)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. *c)* $x = k \cdot \pi$. *d)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

2890. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \le x \le \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$. *b)* $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = k \cdot \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.
c) $2k \le x \le 1 + 2k$. *d)* $-\frac{1}{2} + 2k \le x \le \frac{1}{2} + 2k$.

2891. *a)* $x \ne k \cdot \pi$. *b)* $x \ne \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. *c)* $x \ne \frac{1}{k}$, (ahol $k \in \mathbf{Z}$). *d)* $x \ne \frac{1}{\frac{1}{2} + k}$, (ahol $k \in \mathbf{Z}$).

2892. *a)* Minden x valós számra értelmezett, tehát a valós számok halmaza az értelmezési tartomány. *b)* $x = 2k$. *c)* $x_1 = \frac{1}{2} + 2k$; $x_2 = \frac{3}{2} + 2l$. *d)* $-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$.

2893. *a)* $\pi + k \cdot 4 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 4 \cdot \pi$. *b)* $\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.
c) $0 + k \cdot \pi < x \le \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. *d)* $x_1 = 4k$; $x_2 = 4l + 2$.

Összetettebb feladatok

2894. *a)* $\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
b) Nincs megoldása az egyenlőtlenségrendszernek a valós számok halmazán.
c) $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2895. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{7 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
b) $0 + k \cdot \pi < x \le \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot \pi$.
c) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2896. *a)* $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk szorzattá!
b) $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$, vagy rövidebben $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *c)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2897. *a)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; másképpen $-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
b) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

c) $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi < x < \frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\pi+k\cdot 2\cdot\pi < x < 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$.

2898. *a)* $0+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$. Oldjuk meg először a $\sin x$-re másodfokú egyenlőtlenséget!

b) $0+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{5\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$.

2899. *a)* $\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{4\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $0+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{7\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $0+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{7\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$.

2900. *a)* $\frac{7\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi < x < \frac{11\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$. A $\cos^2 x$-et alakítsuk át $\sin^2 x$ segítségével, majd ekkor $\sin x$-re egy másodfokú egyenlőtlenséget kapunk, amelyet oldjunk meg!

b) $\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi < x < \frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$.

2901. *a)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{5\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$.

b) $0+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$.

2902. *a)* $\frac{4\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{5\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$.

b) $\frac{5\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{7\cdot\pi}{6}+k\cdot 2\cdot\pi$; $-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\cdot\pi$.

2903. *a)* $\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi \le x \le \frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot\pi$; $-\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{6}+k\cdot\pi$.

b) $0+k\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{4}+k\cdot\pi \le x \le \pi+k\cdot\pi$; $\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi \le x \le \frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi$.

2904. *a)* $-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$. *b)* $\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi \le x \le \frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi$.

2905. *a)* $0+k\cdot\pi \le x < \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$; $-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi < x \le -\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$.

b) $-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi < x < \frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$.

2906. *a)* $0+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *b)* $\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi < x < \frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$.

c) $0+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \pi+k\cdot 2\cdot\pi$. *d)* $0+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi$; $\frac{3\cdot\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi \le x \le 2\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$.

IV

2907. *a)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
c) $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *d)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2908. *a)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{11 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{7 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
c) $\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{11 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{7 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
d) $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{4 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2909. *a)* $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
b) $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.
c) $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.
d) $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2910. *a)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$. Használjuk a tangens definícióját, majd rendezzük nullára az egyenlőtlenséget! Ezután kapunk egy törtet, ha közös nevezőre hozunk.
b) $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Hasonló módon járhatunk el, mint az előző feladat megoldásánál. *c)* $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.
d) $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{7 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2911. *a)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.
b) $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *c)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\pi + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$. *d)* $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2912. *a)* Az egyenlőtlenség minden x valós számra fennáll. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x = k \cdot 2 \cdot \pi$. *b)* $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

c) $\pi + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

d) $0 + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$.

e) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\pi + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le \frac{5 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{5 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

f) $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $0 + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x \le 2 \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{7 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \le x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$;
$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x \le \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2913. $-2 \le x \le 3$; $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$.

2914. $-\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.
A $\sin^2 x$-et alakítsuk át $\cos^2 x$ segítségével! Az egyenlőtlenséget alakítsuk át a következő alakra: $0 < 4 \cdot |\cos x|^2 + 4 \cdot |\cos x| - 3$. E $|\cos x|$-re másodfokú egyenlőtlenség megoldásából $|\cos x| > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget kapjuk.

2915. $-\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{5 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a tangens definícióját, majd alakítsuk át az egyenlőtlenséget a következő alakúra: $0 < 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sin x + 3$. Oldjuk meg ezen $\sin x$-re másodfokú egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x$.

2916. $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi < x < \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget úgy, hogy $\sin^2 x$-et alakítjuk át $\cos^2 x$ segítségével. Azt kapjuk, hogy $\frac{(2 \cdot \cos x - 1)^2}{\cos x} \le 0$.

2917. $x \ne k \cdot \frac{\pi}{2}$. Ha $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, akkor $|\sin x| + |\cos x| = 1$, tehát ezekre a számokra nem teljesül az egyenlőtlenség. Ha $x \ne k \cdot \frac{\pi}{2}$, akkor $|\sin x| > \sin^2 x$ és $|\cos x| > \cos^2 x$, így $|\sin x| + |\cos x| > \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Az egyenlőtlenség $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ kivételével minden valós számra igaz.

2918. $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ esetén $x > \sin x$, ezért $x \cdot \sin x > \sin^2 x$, másrészt $\cos x > \cos^2 x$. Adjuk össze a két egyenlőtlenséget!

2919. $2 - \cos^2 x - x \cdot \sin x = (1 - \sin x)^2 + (2 - x) \cdot \sin x > 0$.

IV

Szélsőértékfeladatok

2920. *a)* $f_{\max} = 5,\ x_{\max} = -\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{\min} = -1,\ x_{\min} = \dfrac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi.$

b) $g_{\max} = 2,\ x_{\max} = k \cdot 2 \cdot \pi;\quad g_{\min} = -6,\ x_{\min} = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi.$

2921. *a)* $f_{\max} = 4,\ x_{\max} = k \cdot \pi;\quad f_{\min} = 1,\ x_{\min1} = \dfrac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{\min2} = -\dfrac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi.$

b) $g_{\max} = 1,\ x_{\max1} = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{\max2} = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi;\quad g_{\min} = -1,\ x_{\min} = \dfrac{\pi}{2} + m \cdot \pi.$

2922. *a)* $f_{\max} = 3,\ x_{\max1} = k \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{\max2} = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{\min} = 2,\ x_{\min} = \dfrac{\pi}{2} + m \cdot \pi.$

b) $g_{\max} = 2,\ x_{\max} = k \cdot \pi;\quad g_{\min} = 1,\ x_{\min1} = \dfrac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{\min2} = -\dfrac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi.$

c) $h_{\max} = \dfrac{3}{2},\ x_{\max} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi;\quad h_{\min} = 1,\ x_{\min1} = l \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{\min2} = -\pi + m \cdot 2 \cdot \pi.$

2923. $f_{\max} = 3,\ x_{\max} = k \cdot \pi;\quad f_{\min} = 2,\ x_{\min1} = \dfrac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi,\ x_{\min2} = -\dfrac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi.$

2924. $f_{\max} = 1,\ x_{\max} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{\min} = -1,\ x_{\min} = \dfrac{3 \cdot \pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi.$ Ha felhasználjuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, azonosság négyzetre emelésével kapott azonosságot, akkor megmutathatjuk, hogy: $f(x) = \sin x$.

2925. $f_{\max} = \dfrac{17}{8},\ x_{\max1} \approx 0{,}8480,\ x_{\max2} \approx 2{,}2935;\quad f_{\min} = -4,\ x_{\min} = \dfrac{3 \cdot \pi}{2}.$

Alakítsunk ki teljes négyzetet! $f(x) = -2 \cdot \left(\sin x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{17}{8}$. A minimum a $\sin x$ függvény vizsgálatával kapható meg.

2926. $f_{\max} = 3 \cdot \sqrt{3} + 7,\ x_{\max} = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{\min} = \dfrac{7}{4},\ x_{\min1} = \dfrac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi,$

$x_{\min2} = -\dfrac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. Alakítsunk ki teljes négyzetet! $f(x) = \left(\sqrt{3} \cdot \cos x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$.

2927. $f_{\min} = 1,\ x_{\min} = k \cdot \pi$. Vegyük figyelembe, hogy: $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$, ezt felhasználva megmutathatjuk, hogy: $f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg}^4 x + 1$.

2928. $f_{\max} = \dfrac{1}{2},\ x_{\max} = k \cdot 2 \cdot \pi;\quad f_{\min} = -\dfrac{1}{2},\ x_{\min} = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget 1-re és $\cos^2 x$-re! $\dfrac{1 + \cos^2 x}{2} \geq \sqrt{1 \cdot \cos^2 x} = |\cos x|$, ebből mutassuk meg, hogy: $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \leq \dfrac{1}{2}$.

2929. $f_{\min} = 12$. Alakítsuk át f-et a következő alakúra: $f(x) = 9 \cdot x \cdot \sin x + \dfrac{4}{x \cdot \sin x}$! Ha ezen összeg két tagjára alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, akkor megkaphatjuk a minimális értéket.

A szinusztétel alkalmazása

Bevezető alapfeladatok

2930. $\approx 52{,}71°$; $\approx 43{,}29°$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 6{,}89$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2931. $\approx 3{,}11$ cm a háromszög ismeretlen oldala, $\approx 42{,}72°$; $\approx 15{,}28°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2932. $\approx 15{,}44$ cm a háromszög ismeretlen oldala, $\approx 27{,}31°$; $\approx 117{,}69°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2933. Ez a háromszög nem létezik.
2934. **1. eset:** $\approx 14{,}25$ cm a háromszög ismeretlen oldala, $\approx 42{,}91°$; $\approx 104{,}09°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2. eset: $\approx 2{,}53$ cm a háromszög ismeretlen oldala, $\approx 137{,}09°$; $\approx 9{,}91°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2935. $\approx 8{,}5$ cm; $\approx 9{,}34$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2936. ≈ 12 cm; $\approx 9{,}47$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.

IV

Alapvető feladatok

2937. Nem létezik ez a háromszög.
2938. **1. eset:** $\approx 71{,}21°$; $\approx 46{,}53°$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 7{,}05$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2. eset: $\approx 108{,}79°$; $\approx 8{,}96°$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 1{,}51$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2939. **1. eset:** $\approx 37°12'$; $\approx 108°23'$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 14{,}44$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2. eset: $\approx 142°48'$; $\approx 2°47'$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 0{,}74$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2940. **1. eset:** $\approx 85°28'$; $\approx 35°50'$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 4{,}1$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2. eset: $\approx 94°32'$; $\approx 26°46'$ a háromszög ismeretlen szögei, $\approx 3{,}16$ cm a háromszög ismeretlen oldala.
2941. $\approx 6{,}94$ cm; $\approx 5{,}06$ cm; $\approx 5{,}79$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2942. $\approx 10{,}62$ cm; $\approx 18{,}12$ cm; $\approx 17{,}43$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2943. $\approx 3{,}81$ cm; $\approx 4{,}97$ cm; $\approx 5{,}22$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2944. $\approx 4{,}64$ cm; $\approx 6{,}25$ cm; $\approx 7{,}11$ cm a háromszög ismeretlen oldalai.
2945. Alkalmazzuk a háromszög oldalaira az $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$ összefüggést!
2946. Alkalmazzuk a $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ képletet, és alkalmazzuk a szinusztételt az a és b oldalakra!
2947. $\approx 7{,}87$ cm; $\approx 6{,}1$ cm a paralelogramma oldalainak a hossza.
2948. $\approx 12{,}69$ cm; $\approx 8{,}87$ cm a paralelogramma oldalainak a hossza.
2949. $\approx 81{,}23$ N; $\approx 212{,}66$ N az összetevők nagysága.
2950. $\approx 24°36'$-es szöget bezáró irányban evezzünk a víz folyásirányához képest.
2951. $\approx 3{,}47$ cm; $3{,}05$ cm; $3{,}47$ cm hosszúságú részekre osztják az egyenesek a szöggel szemközti oldalt.

Összetettebb feladatok

2952. ≈ 13 cm; ≈ 15 cm; ≈ 14 cm a háromszög oldalainak a hossza. Alkalmazzuk a háromszög megfelelő területképletét, ebből kapjuk, hogy $a \cdot b \approx 195$! Alkalmazzuk a szinusztételt a-ra és b-re, majd oldjuk meg az egyenletrendszert!

2953. $a \approx 116$ cm; $b \approx 89$ cm; $c \approx 123$ cm a háromszög oldalainak a hossza, $\beta_1 \approx 43{,}6°$; $\gamma_1 \approx 72{,}39°$ a háromszög másik két szöge, illetve $\beta_2 \approx 8{,}38°$ és $\gamma_2 \approx 107{,}61°$. Alkalmazzuk a háromszög megfelelő területképletét és a feltételi egyenletet! Ebből kapjuk a γ szöget, majd ebből a β szöget. Alkalmazzuk a szinusztételt a-ra és b-re, ebből és a feltételi egyenletből kapjuk a-t és b-t. Írjunk fel egy újabb szinusztételt c-re és például a-ra, ebből kapjuk c-t.

2954. $CD \approx 9{,}66$ cm; $AC = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm; $AD = 5$ cm. A kerületi szögek tételéből következik, hogy az $ADC\sphericalangle = 45°$. Ebből következik, hogy $CAD\sphericalangle = 105°$. Alkalmazzuk a szinusztétel következő változatát $a = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$, az ACD háromszög oldalaira!

2955. $\approx 18{,}23$ cm; $\approx 38{,}41$ cm a trapéz alapjai, $\approx 21{,}35$ cm a trapéz szára.

2956. $\approx 5{,}41$ dm a trapéz szára, $\approx 6{,}54$ dm a trapéz hosszabbik alapja, $\approx 23{,}02\ \mathrm{dm}^2$ a trapéz területe.

2957. $\approx 29{,}1$ cm a trapéz szára, $\approx 4{,}32$ cm a trapéz rövidebbik alapja. Toljuk el önmagával párhuzamosan a 17,5 cm-es szárat úgy, hogy a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki. Ekkor kaptunk egy olyan háromszöget, amelynek egyik oldala 17,5 cm, másik oldala b, harmadik oldala $(38\ \mathrm{cm} - c)$. Gondoljuk meg, hogy ezen háromszögnek ismerjük a szögeit. Ezért két szinusztételt felírva megkaphatjuk a keresett oldalakat.

2958. $\approx 13{,}22$ cm a trapéz rövidebbik alapja, $107{,}2°$; $\approx 40°24'$; $\approx 139°36'$ a trapéz ismeretlen szögei. Toljuk el önmagával párhuzamosan a 7,6 cm hosszú szárat úgy, hogy az a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki. Ekkor kaptunk egy alkalmas háromszöget, amelyre alkalmazzuk a szinusztételt.

2959. ≈ 7 cm a trapéz másik szára, $\approx 78{,}34\ \mathrm{cm}^2$ a trapéz területe. Toljuk el a 12,5 cm hosszúságú szárat önmagával párhuzamosan úgy, hogy a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki! Ekkor kaptunk egy megfelelő háromszöget, amelynek egy oldalát ismerjük, és ismerjük a szögeit.

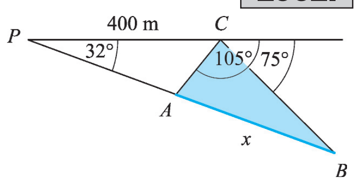
2960. $\approx 11{,}2$ cm; $\approx 13{,}09$ cm; $\approx 7{,}62$ cm a háromszög oldalai, $\approx 35°30'$; $\approx 85°54'$ a háromszög ismeretlen szögei. Először határozzuk meg a magasság és a szögfelező hajlásszögét, az ezt tartalmazó derékszögű háromszögből. Ennek segítségével megkaphatjuk az eredeti háromszög ismeretlen szögeit. Ezután szinusztételekkel számíthatjuk a háromszög oldalait.

2961. $\approx 19{,}57$ cm; $19{,}85$ cm; $\approx 12{,}12$ cm; $\approx 16{,}76$ cm a négyszög ismeretlen oldalai. Alkalmazzuk a szinusztételt négyszer, a két háromszögre, amelyek az ismert átló megrajzolásával keletkeznek!

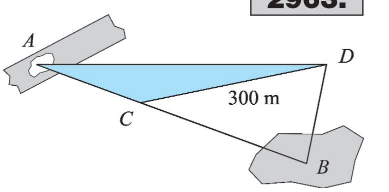
2962. $\approx 162{,}5$ m messze van egymástól a két épület. Határozzuk meg a PCA szöget, majd a PAC szöget! Ezután alkalmazzuk a szinusztételt a PCA háromszögre! Ekkor megkapjuk az AC szakasz hosszát. Majd számítsuk ki az ABC háromszög szögeit. Ezután alkalmazzuk a szinusztételt az ABC háromszögre!

2963. ≈ 480 m a két fa távolsága. Számítsuk ki a háromszögek szögeit! Írjunk fel egy szinusztételt az ACD háromszögre, ebből megkaphatjuk az AC távolságot. Majd írjunk fel egy szinusztételt a BCD háromszögre! Ebből megkaphatjuk a BC szakasz hosszát. Majd $AB = AC + BC$.

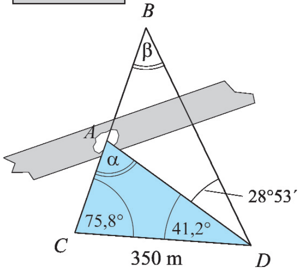
2962.



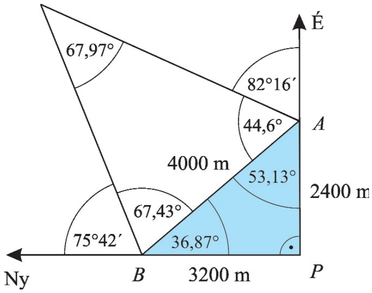
2963.



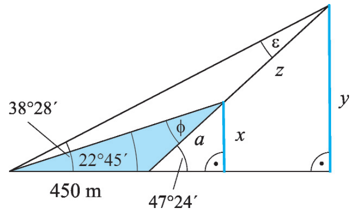
2964.



2965.



2966.



IV

2964. $AB \approx 328$ m a két tereptárgy távolsága. $CBD\sphericalangle = 34°7'$, $CAD\sphericalangle = 63°$. Alkalmazzuk a szinusztételt az ACD háromszögre! Ebből megkaphatjuk az AD szakaszt. $\dfrac{AD}{350} = \dfrac{\sin 75{,}8°}{\sin 63°} \Rightarrow$ $\Rightarrow AD \approx 380{,}8$ m. Majd alkalmazzuk a szinusztételt az ABD háromszögre! Ebből számíthatjuk az AB szakaszt. $AB \approx 328$ m.

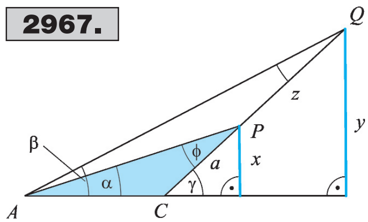
2965. $BC \approx 3030$ m; $AC \approx 3985$ m. Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk az AB távolságot. Majd szögfüggvény segítségével számítsuk ki az ABP háromszög szögeit. Ezután kiszámíthatjuk az ABC háromszög szögeit. Majd az ABC háromszögre felírt szinusztétel segítségével kiszámíthatjuk a-t, majd egy másik szinusztétel felírásából kiszámíthatjuk b-t.

$$\frac{BC}{4000} = \frac{\sin 44{,}6°}{\sin 67{,}97°}; \quad \frac{AC}{4000} = \frac{\sin 67{,}43°}{\sin 67{,}97°}.$$

2966. $x \approx 307$ m a közelebbi hegycsúcs magassága; $y \approx 1327$ m; $z \approx 1386$ m a hegycsúcsok távolsága. Először számítsuk ki a Φ szöget, majd alkalmazzunk egy szinusztételt az a oldalra és a 450 m-es oldalra, amelyből kiszámíthatjuk a-t. Ezután szögfüggvénnyel kiszámíthatjuk x-et. Számítsuk ki az ε szöget, majd írjunk fel egy szinusztételt a $z + a$ oldalra és a 450 m-es oldalra, ebből kiszámíthatjuk z-t. Ezután szögfüggvény segítségével kapjuk az y távolságot.

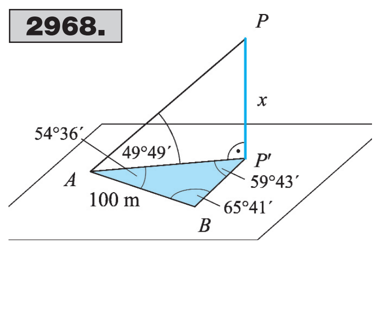
2967. $x = \dfrac{t \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha)}$; $y = \dfrac{t \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\gamma - \beta)}$; $x \approx 349$ m; $y \approx 522$ m magasan vannak a hegycsúcsok a síkság felett. Írjunk fel egy szinusztételt az ACP háromszögre! Másrészt vegyük észre, hogy $\Phi = \gamma - \alpha$, ezekből kapjuk a PC távolságot. Szögfüggvény segítségével ebből kaphatjuk x képletét. Vegyük még figyelembe, hogy $\varepsilon = \gamma - \beta$. Másrészt alkalmazzuk a szinusztételt az ACQ háromszögre, ebből kapjuk a CQ távolságot! Ebből szögfüggvény segítségével kaphatjuk az y képletét.

2967.



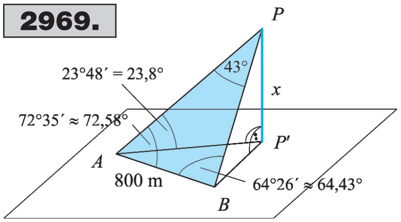
2968. $x \approx 125$ m magas az antenna. Az ABP' háromszögre írjunk fel a szinusztételt az AP' és az $AB = 100$ m-es oldalra, ebből kaphatjuk az AP' szakasz hosszát. Ezután az APP' háromszögre felírva egy megfelelő szögfüggvényt, meghatározhatjuk az $PP' = x$ szakasz hosszát. $\dfrac{AP'}{100} =$ $= \dfrac{\sin 65°41'}{\sin 59°43'}$, $AP' \approx 105{,}5$ m. $x \approx 105{,}5 \cdot \mathrm{tg}\, 49°49'$.

2968.

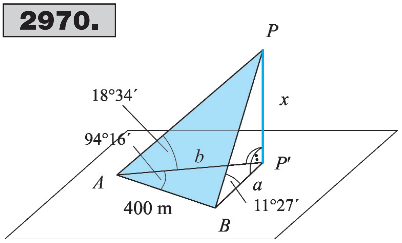


IV

2969.



2970.



2969. $PP' \approx 427$ m magasra emelkedik a hegy a síkság fölé. Alkalmazzuk a szinusztételt az AP és a 800 m-es oldalra, ebből kapjuk AP értékét. Az APP' derékszögű háromszögre alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt és ekkor megkaphatjuk a PP' értékét. $\frac{AP}{800} = \frac{\sin 64{,}43°}{\sin 43°}$, $AP \approx 1058$ m.

2970. $x \approx 107{,}4$ m magas az antenna. Fejezzük ki x-szel az a és a b távolságokat szögfüggvényt alkalmazva! Ezután alkalmazzuk a szinusztételt az ABP' háromszögre! Ekkor x kiesik és az egyenletből meghatározhatjuk az ABP' szöget. Ezen szög segítségével meghatározhatjuk az $AP'B$ szöget. Írjuk fel a szinusztételt az $AP'B$ háromszögben az a és az $AB = 400$ m-es oldalra. Ebből kaphatjuk az $a \approx 530{,}42$ m hosszúságot. A BPP' háromszögre egy megfelelő szögfüggvényt alkalmazva kiszámíthatjuk x-et.

Nehezebb feladatok

2971. $BC = \sqrt{3}$.

2972. $BK = \sqrt{\frac{6}{5}}$.

2973. $AK = \frac{6}{23}$.

2974. $\frac{AB}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{5}{9}$.

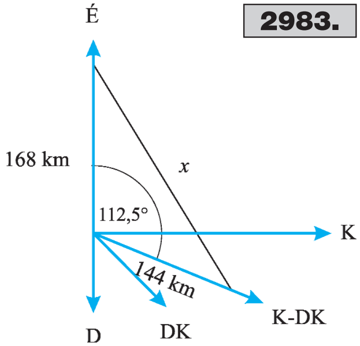
2975. $QM < RS$.

A koszinusztétel alkalmazása

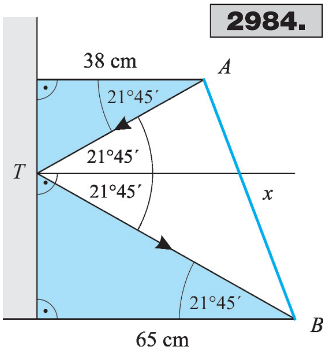
Alapvető feladatok

2976. *a)* $\approx 8{,}1$ cm a harmadik oldal hossza. *b)* $\approx 73{,}4°$ a háromszög legnagyobb szöge. *c)* $\approx 42{,}6°$ a háromszög legkisebb szöge. *d)* $\approx 112{,}41°$; $\approx 29{,}54°$; $\approx 38{,}05°$ a háromszög szögei.
2977. *a)* $\approx$ 26°49′ szög alatt látjuk a két távvezetékoszlop távolságát. *b)* $\approx 11{,}36$ cm az óramutatók végpontjainak távolsága. *c)* **1. eset:** ≈ 154 m az őrházak távolsága. **2. eset:** ≈ 324 m az őrházak távolsága. *d)* $\approx 37{,}3$ N az eredő erő nagysága, $\approx 13{,}31°$ az eredő erő hajlásszöge a 24 N-os erővel. *e)* $\approx 18{,}78$ cm; $\approx 9{,}13$ cm a paralelogramma oldalai; $\approx 45°34'$ és $\approx 134°26'$ a paralelogramma szögei. *f)* $\approx 590{,}88$ cm^2 a paralelogramma területe, $\approx 26{,}93$ cm a paralelogramma keresett átlójának hossza.
2978. $\approx 60{,}31$ cm a másik oldal hossza, $\approx 72{,}71$ cm a hosszabbik átló hossza.
2979. **1. eset:** 5 cm a harmadik oldal hossza; **2. eset:** $\approx 12{,}37$ cm a harmadik oldal hossza.

2983.



2984.

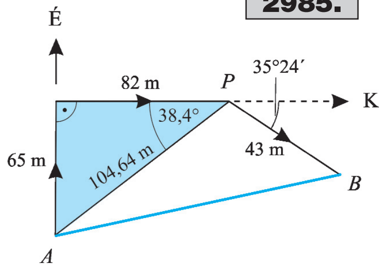


2980. $\approx 42{,}75$ m; $\approx 33{,}47$ m a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 88{,}07°$; $\approx 53{,}14°$ a háromszög ismeretlen szögei.
2981. 6 cm^2 a háromszög területe. Írjuk fel a koszinusztételt a BC szakaszra! Legyen például $AC = x$, ekkor $BC = 7 - x$. A koszinusztételből kaphatjuk, hogy $x = 4$. Ekkor a háromszög oldalhosszai 3 cm, 4 cm, 5 cm. Vegyük észre, hogy e háromszög derékszögű. Miért?
2982. Alkalmazzuk a koszinusztételt a c oldalra, ebből fejezzük ki cos γ-t és helyettesítsük be a bizonyítandó egyenletbe.
2983. $x \approx 260$ km lesz a két hajó távolsága 4 óra múlva.
2984. $AB \approx 49{,}2$ cm.

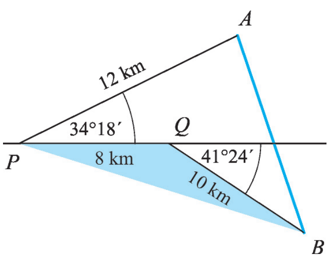
Összetettebb feladatok

2985. $AB \approx 123{,}73$ m. Számítsuk ki először az AP távolságot, majd a BP távolságot és az APB szöget. Ezután alkalmazzuk a koszinusztételt az ABP háromszögben az AB oldalra!
2986. $AB \approx 14{,}5$ km a két község távolsága légvonalban. Először számítsuk ki a PQB szöget, majd a PB szakaszra írjuk fel a koszinusztételt a PQB háromszögben. Szinusztétellel vagy koszinusztétellel számítsuk ki QBP szöget. Ezután az AB szakaszra írjuk fel a koszinusztételt az APB háromszögben.
2987. 15 cm és 8 cm hosszúak az óramutatók. Legyen a nagymutató hossza a, a kismutató hossza b. 2 órakor 60°-os szöget zárnak be az óramutatók, írjuk fel a koszinusztételt: $13^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 60°$. Másrészt 9 órakor az óramutatók derékszöget zárnak be, írjuk fel Pitagorasz tételét: $a^2 + b^2 = 17^2$. Oldjuk meg az egyenletrendszert!

2985.



2986.



2988. $\approx 5{,}92$ cm a rövidebbik alap hossza, $\approx 17{,}34$ cm a szárak hossza, $\approx 50°27'$; $\approx 129°33'$ a trapéz szögei. Számítsuk ki először a trapéz szárát koszinusztétellel. Majd számítsuk ki a trapéz hosszabbik alapján levő szögét, szintén koszinusztétellel. Húzzuk be a trapéz magasságait a rövidebbik alap végpontjainál. Folytassuk!

2989. $\approx 38{,}05$ cm a trapéz ismeretlen szára, $\approx 43°29'$; $\approx 136°31'$ a trapéz ismeretlen szögei. Toljuk el a 27,5 cm-es szárat önmagával párhuzamosan úgy, hogy a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki. Ekkor kapunk egy olyan háromszöget, amelyre felírva egy koszinusztételt, megkaphatjuk az ismeretlen szárat. Ugyanerre a háromszögre felírt egy másik koszinusztétellel kaphatjuk a hosszabbik alapon levő ismeretlen szöget.

2990. $\approx 29°47'$; $\approx 150°13'$; $\approx 124°44'$; $\approx 55°16'$; a trapéz szögei. Toljuk el önmagával párhuzamosan az 52 m-es szárat, úgy, hogy a rövidebbik alap másik végpontjából induljon ki. Ekkor kaptunk egy alkalmas háromszöget, amelyre alkalmazhatjuk a koszinusztételt.

2991. $\approx 15{,}83$ cm a háromszög ismeretlen oldala. Először számítsuk ki az ismeretlen oldallal szemközti szöget koszinusztétel segítségével, amelyet az ismert súlyvonalra írunk fel. Majd alkalmazzuk a koszinusztételt az eredeti háromszögben az ismeretlen oldalra!

2992. $\approx 11{,}83$ cm a harmadik oldal hossza. Tükrözzük a háromszöget az ismeretlen oldal felezőpontjára! Ekkor egy paralelogrammát kapunk, ha az eredeti háromszöget és a tükörképét együtt tekintjük. Tekintsük ennek a paralelogrammának azt a részháromszögét, amelynek egyik oldala az ismert súlyvonal kétszerese, vagyis 20,8 cm, a többi oldala 8,2 cm és 14,8 cm. Koszinusztétel segítségével meghatározhatjuk ennek a háromszögnek azt a szögét, amely a 14,8 cm-es oldallal van szemben. Ezután írjunk fel egy újabb koszinusztételt arra a háromszögre, amelyben az ismeretlen oldal fele, a 8,2 cm és a 10,4 cm-es oldalak, illetve az előbb meghatározott szög, szerepel.

2993. $\approx 27{,}66$ cm a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza. Tükrözzük a háromszöget a harmadik oldal felezőpontjára! Ekkor kapunk egy paralelogrammát. Írjunk fel egy koszinusztételt a paralelogramma azon részháromszögére, amelynek egyik oldala az ismeretlen súlyvonal kétszerese, másik két oldala 28 cm, illetve 45 cm. Ezen két oldal által bezárt szöget előbb persze könnyen kiszámítjuk.

2994. $\approx 16{,}54$ cm; $\approx 9{,}46$ cm a paralelogramma oldalai. Írjunk fel egy koszinusztételt a 18 cm-es oldalra. Az a és b a háromszög másik két oldala. Másrészt a feltételből $a + b = 26$ cm. Oldjuk meg az egyenletrendszert!

2995. 7 cm, illetve 9 cm a két átló hossza. Írjunk fel egy koszinusztételt az x hosszúságú átlóra, majd az $x + 2$ hosszúságú átlóra! Használjuk fel, hogy $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Oldjuk meg ezután az egyenletrendszert. Például úgy, hogy összeadjuk az egyenletek megfelelő oldalait, ekkor $\cos\alpha$ kiesik és egy másodfokú egyenletet kapunk x-re, amelyet könnyen megoldunk.

2996. Mindegyik oldalra írjunk fel egy-egy koszinusztételt! Mégpedig azon háromszögekben, amelyeknek oldalai az ismeretlen oldal és az átlók félhosszúságai. Legyen φ az átlók hajlásszöge, ekkor használjuk fel, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Adjuk össze az előbb felírt két koszinusztételt, használjuk fel az előbbi összefüggést és rendezés után megkapjuk a bizonyítandó állítást.

2997. *a)* Írjunk fel két koszinusztételt, az egyiket az a, $\frac{c}{2}$, s_c oldalakkal bíró háromszögben az a oldalra. A másikat a b, $\frac{c}{2}$, s_c oldalú háromszögben a b oldalra. Legyen φ az s_c és a c oldal hajlásszöge, ekkor használjuk ki, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Adjuk össze a két koszinusztétel megfelelő oldalait, ekkor a φ-t tartalmazó tagok kiesnek, és rendezés után megkapjuk s_c keresett képletét. *b)* Az előbb igazolt súlyvonalképlet segítségével írjuk fel a súlyvonalak hosszának négyzeteit, majd adjuk ezeket össze és megkapjuk a bizonyítandó összefüggést.

2998. Írjunk fel két koszinusztételt az s_a, illetve s_b súlyvonalakra:

$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot b\cdot\cos\gamma$; $s_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\cdot a\cdot\frac{b}{2}\cdot\cos\gamma$. Képezzük a két egyenlet különbségét, majd használjuk fel, hogy a feltétel szerint $a < b$! $s_a^2 - s_b^2 = \frac{3}{4}\left(b^2 - a^2\right) \Rightarrow s_a > s_b$. Hiszen $b^2 - a^2$ pozitív szám $b > a$ miatt.

2999. $72\,\text{cm}^2$ a háromszög területe. Legyen ABC a keresett területű háromszög, ahol $AC = 10\,\text{cm}$, és F az AB oldal felezőpontja, míg E a BC oldal felezőpontja. Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Ekkor $AS = 8\,\text{cm}$, $CS = 6\,\text{cm}$. Miért? $t_{ABC} = 2 \cdot t_{ACF}$. Miért? Alkalmazzuk az ASC háromszögre a koszinusztételt, mégpedig az AS oldalra felírva! Legyen φ az AS oldallal szemközti szög az említett háromszögben. Ekkor az előző koszinusztételből kaphatjuk, hogy $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. Ebből $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, miért? Írjuk fel az ACF háromszög területképletét, amelyből kaphatjuk, hogy $t_{ACF} = 36\,\text{cm}^2$. Ebből pedig $t_{ABC} = 72\,\text{cm}^2$.

IV

3000. $BC = \sqrt{40}\ \text{cm} \approx 6{,}32\,\text{cm}$. Az ABF háromszögben és a BCE háromszögben írjunk fel egy-egy koszinusztételt az AF szakaszra, illetve a CE szakaszra. Itt F a BC oldal felezőpontja és E az AB oldal felezőpontja. Oldjuk meg az egyenletrendszert, amelyben az egyik ismeretlen $BC = a$, míg a másik ismeretlen $\cos\beta$.

3001. $AD = 2$ egység. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt, amelyből kaphatjuk, hogy $\frac{DB}{CD} = 2$. Legyen $CD = x$ és így $DB = 2x$. Alkalmazzuk a koszinusztételt a CAD háromszögre és a DAB háromszögre! Az egyenletrendszert megoldva kaphatjuk, hogy $AD = y = 2$. Keressünk elemibb megoldást, amely nem használ koszinusztételt. Legyen az E pont olyan, hogy BE párhuzamos DA-val és ABE szabályos háromszög. Ekkor a BEC háromszög hasonló a DAC háromszöghöz. Miért?

3002. $r = \frac{56}{9} \approx 6{,}22$ egység a keresett kör sugara. Legyen a 13 és a 14 egység hosszúságú oldalak által bezárt szög γ. Legyen O a keresett sugarú kör középpontja, ekkor O rajta van a γ szög szögfelezőjén. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt erre a szögfelezőre! Ebből megkaphatjuk, hogy az O pont $\frac{65}{9}$ és $15 - \frac{65}{9}$ egységnyi részekre osztja fel a 15 egység hosszúságú oldalt. Írjuk fel a koszinusztételt az eredeti háromszögre, mégpedig a 14 egység hosszúságú oldalra! Ebből megkaphatjuk, hogy a 13 egység és a 15 egység hosszúságú oldalak α szögére fennáll, hogy: $\cos\alpha = \frac{33}{65}$. Ebből következik, hogy $\sin\alpha = \frac{56}{65}$. Miért? Másrészt $\frac{r}{x} = \sin\alpha$, ahol $x = \frac{65}{9}$.

3003. **1. eset:** $2 \cdot \sqrt{\frac{64}{17}} \approx 3{,}88$ egység; $5 \cdot \sqrt{\frac{64}{17}} \approx 9{,}70$ egység a másik két oldal hossza.

2. eset: $2 \cdot \sqrt{\frac{64}{41}} \approx 2{,}50$ egység; $5 \cdot \sqrt{\frac{64}{17}} \approx 6{,}25$ egység a másik két oldal hossza.

Legyen γ az AB oldallal szemközti szög. Alkalmazzuk az $a = 2 \cdot R \cdot \sin\,\alpha$ képletet! Ebből $\sin\gamma = \frac{4}{5}$, és ebből $\cos\gamma = \frac{3}{5}$ vagy $\cos\gamma = -\frac{3}{5}$. Legyen a másik két oldal hossza $2x$, illetve $5x$. Írjunk fel egy koszinusztételt a 8 egység hosszúságú oldalra! Ekkor x-re kapunk egy egyenletet, amelyből x-et könnyen kifejezhetjük.

3004. $\frac{3}{2}$ a paralelogramma két szomszédos oldalának aránya, vagy $\frac{2}{3}$, de ez ugyanaz a paralelogramma. Írjunk fel az átlókra egy-egy koszinusztételt, majd képezzük az átlók négyzeteinek a hányadosát! Az a és b oldalakat tartalmazó kapott tört számlálóját és nevezőjét osszuk el b^2-tel. S így olyan egyenletet kapunk, amelyben $\frac{a}{b}$ lesz az ismeretlen. Oldjuk meg erre az egyenletet! Kapjuk, hogy $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, illetve ennek a reciprokát.

3005. $\approx 67{,}96$ m a trapéz hosszabbik alapja és ugyanekkora a trapéz egyik szára; $\approx 54{,}37$ m a trapéz rövidebbik alapja; $\approx 62{,}29$ m a trapéz másik szára. Határozzuk meg először a szabályos háromszög, illetve a másik háromszög területét. Kapjuk, hogy a szabályos háromszög területe $2000\ \mathrm{m}^2$. Írjuk fel erre a szabályos háromszögre a trigonometrikus területképletet! Ebből kaphatjuk, hogy $a = \sqrt{\frac{8000}{\sqrt{3}}} \approx 67{,}96$ m a trapéz hosszabbik alapja, illetve az egyik szára. A másik háromszögre felírt trigonometrikus területképletből kaphatjuk, hogy a trapéz rövidebbik alapja $c \approx 54{,}37$ m hosszú. Az ismeretlen b szárra írjunk fel egy koszinusztételt!

3006. $\approx 57°34'$; $\approx 142°21'$ a négyszög ismeretlen szögei, $\approx 12{,}14$ cm a négyszög ismeretlen oldala. Húzzuk be a négyszög azon átlóját, amely a 8 cm-es és a 13 cm-es oldalak közös csúcspontjából indul ki. Számítsuk ki ezen átló hosszát koszinusztétellel! Majd az ismeretlen oldalt, illetve az egyik ismeretlen szöget egy-egy koszinusztétellel számíthatjuk ki.

3007. $\approx 114°10'$; $\approx 83°29'$; $\approx 86°33'$ a négyszög ismeretlen szögei. Húzzuk meg a négyszög azon átlóját, amely a 8 cm-es és az 5 cm-es oldalak közös csúcspontjából indul ki. Számítsuk ki koszinusztétellel ezen átló hosszát! Ezután három koszinusztételt felírva meghatározhatjuk a négyszög két ismeretlen szögét. Az utolsó szöget ezután könnyen kaphatjuk.

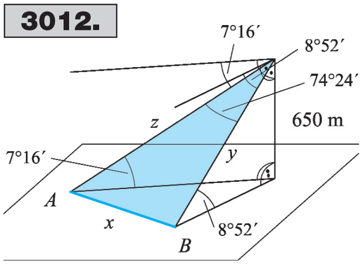
3008. $AC = 7$ egység, $t_{ABCD} = 5 \cdot \sqrt{6} + \frac{15}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 18{,}74$ területegység. Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögben az AC oldalra! Ebből kaphatjuk, hogy $AC = 7$. Vegyük észre, hogy az ADC háromszög derékszögű! Miből következik ez? Eztán számítsuk ki az ACD háromszög területét és az ABC háromszög területét!

3009. $\approx 82°51'$; $\approx 97°9'$; $\approx 113°19'$; $\approx 66°41'$ a húrnégyszög szögei. Húzzuk meg a húrnégyszög átlóit! Tekintsük azt az e átlót, amely a 42 cm-es és a 35 cm-es oldalak közös csúcspontjából indul ki. Ez két háromszögre vágja a húrnégyszöget. Alkalmazzuk a koszinusztételt mindegyik háromszögben az e átlóra! Ekkor oldjuk meg az egyenletrendszert, felhasználva, hogy $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 82°51'$. Ebből kapjuk, hogy $\gamma \approx 97°9'$. Írjunk fel most az f átlóra két koszinusztételt! Használjuk fel, hogy $\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$. Az egyenletrendszer megoldásából kapjuk, hogy: $\beta \approx 113°19'$. Ebből kapjuk, hogy $\delta \approx 66°41'$.

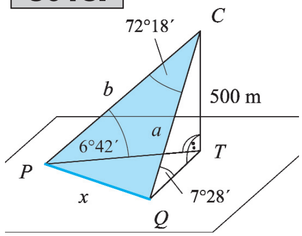
3010. Legyen $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Írjunk fel négy koszinusztételt az átlók behúzása után keletkezett négy háromszögre! Legyen φ az átlók hajlásszöge, x és $e - x$ az e átló két szakasza, y és $f - y$ az f átló két szakasza. Ekkor $a^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos(180° - \varphi)$;
$c^2 = (e - x)^2 + (f - y)^2 - 2 \cdot (e - x) \cdot (f - y) \cdot \cos(180° - \varphi)$; $b^2 = x^2 + (f - y)^2 - 2 \cdot x \cdot (f - y) \cdot \cos\varphi$;
$d^2 = y^2 + (e - x)^2 - 2 \cdot y \cdot (e - x) \cdot \cos\varphi$. Ezeket helyettesítsük be az $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ egyenletbe!
Addig facsarjuk a kapott egyenletet, amíg például a következőt nem kapjuk:
$(e \cdot f - x \cdot y) \cdot \cos\varphi = 0$. Ebből következik, hogy $\cos\varphi = 0$, vagyis $\varphi = 90°$, tehát a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

3011. $\varphi \approx 19{,}47°$. Legyen $AB = 1$, és legyen az O pont az AC szakasz felezőpontja. A Pitagorasz-tételt felhasználva kaphatjuk, hogy $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, másrészt $OH = \sqrt{\frac{3}{2}}$ és $HB = \sqrt{3}$. Vegyük észre, hogy a BHO szög a keresett szög! Alkalmazzuk a koszinusztételt a HOB háromszögben az OB oldalra! Ekkor megkaphatjuk, hogy a φ-vel jelölt BHO szögre: $\cos\varphi = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$, ebből $\varphi \approx 19{,}47°$.

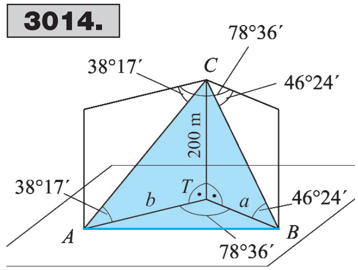
3012.



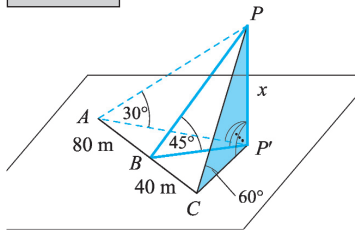
3013.



3014.



3015.



3012. ≈ 5704 m a két hajó távolsága. Megfelelő szögfüggvény segítségével számítsuk ki az y távolságot, majd a z távolságot! Ezután írjunk fel egy koszinusztételt az x, y, z oldalú háromszögben az x oldalra!

3013. $x \approx 4800$ m a két helység távolsága. Először számítsuk ki a $QC = a$ és a $PC = b$ távolságokat. Majd alkalmazzuk a koszinusztételt a PQC háromszögre!

3014. $AB = x \approx 295{,}3$ m a keresett távolság hossza. Számítsuk ki megfelelő szögfüggvény segítségével a $BT = a$ és az $AT = b$ távolságokat. Írjuk fel a koszinusztételt az ABT háromszögre!

3015. $PP' = x = 120$ m magas az antenna. $BP' = x$, miért? Az egyes derékszögű háromszögekre tangens szögfüggvényt alkalmazva kaphatjuk, hogy: $AP' = x \cdot \sqrt{3}$, $CP' = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Írjunk fel egy-egy koszinusztételt az ABP' háromszögben, illetve a BCP' háromszögben az AP' oldalra, illetve a CP' oldalra! Legyen az ABP' szög röviden φ-vel jelölve. Ekkor: $\left(x \cdot \sqrt{3}\right)^2 =$ $= 80^2 + x^2 - 2 \cdot 80 \cdot x \cdot \cos\varphi$, másrészt $\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 40^2 + x^2 - 2 \cdot 40 \cdot x \cdot \cos(180° - \varphi)$. Használjuk fel, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$. Ezután oldjuk meg az egyenletrendszert! Például úgy, hogy az egyik egyenletből kifejezzük $x \cdot \cos\varphi$ -t és ezt behelyettesítjük a másik egyenletbe. Ekkor már csak x lesz az ismeretlen, amelyet könnyen meghatározhatunk a kapott egyenletből.

3016. Alkalmazzuk kétszer a koszinusztételt egyrészt a c oldalra felírva, másrészt a b oldalra felírva. Fejezzük ki ezekből $\cos\gamma$-t, illetve $\cos\beta$-t, majd ezeket helyettesítsük be a megadott feltételi egyenletbe. Ebből kapjuk, hogy $b = c$, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

3017. Alkalmazzuk kétszer a koszinusztételt egyrészt az a oldalra felírva, másrészt a b oldalra felírva. Majd fejezzük ki ezekből $\cos\alpha$-t, illetve $\cos\beta$-t, majd ezeket helyettesítsük be a megadott egyenletbe. Kapjuk, hogy $a = b$, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

3018. Alkalmazzuk kétszer a koszinusztételt egyrészt a c oldalra felírva, másrészt a b oldalra felírva. Fejezzük ki ezekből $\cos\gamma$-t, illetve $\cos\beta$-t, majd ezeket helyettesítsük be a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába. Átalakítások után kaphatjuk, hogy teljesül a bizonyítandó egyenlőség.

3019. Alkalmazzuk háromszor a koszinusztételt az a, b, illetve a c oldalra. Ezekből fejezzük ki a szögek koszinuszait és helyettesítsük be a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába. A megfelelő átalakítások után kapjuk, hogy valóban teljesül a bizonyítandó egyenlőség.

3020. Vegyük figyelembe, hogy $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, másrészt a koszinusztételből $\cos\alpha =$ $= \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$, így $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cdot t}$. Folytassuk!

IV

3021. Alkalmazzuk a koszinusztételt az egyes oldalakra és mindegyikből fejezzük ki a szög koszinuszát! A kapott képleteket helyettesítsük be a bizonyítandó egyenlőség bal oldalába, majd ezt addig alakítsuk amíg meg nem kapjuk a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát.

3022. Kissé egyszerűsítsük a feltételi egyenlőség bal oldalát úgy, hogy elvégezzük a kijelölt műveleteket! Majd alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra felírva. Ezt helyettesítsük be az előző egyenletbe, a rendezés után kapjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, ebből $\alpha = 60°$.

3023. Hozzunk közös nevezőre a bal oldalon, majd szorozzunk a bal oldal és a jobb oldal nevezőjével. Az átalakítások után kapjuk, hogy $a^2 - ac + c^2 = b^2$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt a b oldalra, majd az így kapott b^2 kifejezését helyettesítsük be az előző egyenletbe. Ezután kaphatjuk, hogy $\cos\beta = \frac{1}{2}$, és ebből $\beta = 60°$.

3024. Szorozzunk be a nevezőkkel, az átalakítások után kaphatjuk, hogy $a^2 + c^2 + ac = b^2$. Alkalmazzuk a koszinusztételt a b oldalra! A b^2-re kapott képletet helyettesítsük be az előző egyenletbe, amelyből kaphatjuk, hogy $\cos\beta = -\frac{1}{2}$, ebből $\beta = 120°$.

3025. Alkalmazzuk a koszinusztételt a b oldalra és a c oldalra is! Ezekből fejezzük ki a megfelelő szögek koszinuszait, majd ezeket helyettesítsük be feltételi egyenlet bal oldalába. A kapott egyenletnél szorozzunk a nevezőkkel, majd rendezés után kaphatjuk, hogy: $a^2 \cdot b + a^2c - (b^3 + c^3) = b^2c + bc^2 \Rightarrow a^2\ (b + c) - (b + c)(b^2 - bc + c^2) = bc\ (b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \alpha = 90°$.

3026. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a, illetve a b oldalra! Ezekből fejezzük ki a megfelelő szögek koszinuszait, majd ezeket helyettesítsük be a feltételi egyenletbe! Szorozzunk a nevezőkkel, rendezzük az egyenletet és például azt kaphatjuk, hogy:
$0 = (a^4 - b^4) + (b^2c^2 - a^2c^2)$, ebből $0 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - c^2(a^2 - c^2)$, ebből
$0 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$, ebből pedig az következik, hogy $a = b$ vagyis a háromszög egyenlő szárú, vagy pedig a háromszög derékszögű. Miért? (Vigyázat! Itt a „vagy” természetesen nem kizáró „vagy”, ezért a háromszög lehet egyenlő szárú derékszögű háromszög is.)

3027. A két egyenletből egyrészt (1) $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot a^2 = b^2 + c^2$. Másrészt a második megadott egyenletet négyzetre emelve: (2) $\frac{4}{3} \cdot a^2 = (b + c)^2$. Végezzük el itt a négyzetre emelést, majd a kapott egyenletből vonjuk ki az (1) egyenletet. Kapjuk, hogy (3) $bc = \frac{a^2}{3} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$. Alkalmazzuk most a koszinusztételt az a oldalra! A kapott egyenletbe helyettesítsük be bc képletét a (3) egyenletből, ezenkívül helyettesítsük be $b^2 + c^2$ képletét az (1) egyenletből! Majd oszthatjuk a kapott egyenletet a^2-tel, ekkor a kiesik. Az egyenletből kifejezhetjük, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 30°$.

3028. Szorozzunk be a nevezővel! Emeljünk ki mindegyik oldalon $(b + c)$-t, majd osszunk ezzel a nem nulla kifejezéssel, kapjuk, hogy $b^2 - bc + c^2 = a^2$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra! Az a^2-re kapott kifejezést helyettesítsük be az előző egyenletbe. Rendezés és bc-vel való osztás után kaphatjuk, hogy $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, ebből $\alpha = 60°$.

3029. $t = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ területegység a háromszög területe. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra, majd helyettesítsük be ide a megadott $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ értéket! Egyrészt azt kapjuk, hogy (1) $bc = b^2 + c^2 - 6$. Másrészt a megadott egyenlet négyzetre emelése után azt kaphatjuk, hogy

(2) $b^2 + c^2 = 12 + 6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot bc$. (2)-ből helyettesítsük be (1)-be a $b^2 + c^2$ képletét! Kapjuk, hogy (3) $bc = 2 + 2 \cdot \sqrt{3}$. Másrészt $t = \dfrac{bc \cdot \sin\alpha}{2}$, ide behelyettesítve bc-t (3)-ból és az $\alpha = 60°$-os szöget, kapjuk, hogy $t = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$ területegység a háromszög területe.

3030. $t = 6 \cdot \sqrt{3}$ területegység a legkisebb kerületű megfelelő háromszög területe. Alkalmazzuk a c oldalra a koszinusztételt! A feltételi egyenletből: $c = 5a - b$, ezt helyettesítsük be az előbb felírt koszinusztételbe. Kapjuk, hogy $24a^2 - 9ab = 0$, ebből $8a = 3b$, mert $a > 0$. Legyen $a = 3 \cdot k$ és $b = 8 \cdot k$, ahol k tetszőleges pozitív egész szám. A legkisebb oldalak akkor lesznek, ha $k = 1$, ekkor $a = 3$ és $b = 8$. A feltételi egyenletből $c = 7$. A $t = \dfrac{ab \cdot \sin\gamma}{2}$ egyenletből kaphatjuk a keresett területet.

3031. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra! Fejezzük ki innen a megfelelő szög koszinuszát, miután behelyettesítettük az a megadott képletét, kapjuk, hogy: egyrészt $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2}{2 \cdot bc} - \dfrac{1}{2}$, másrészt $\dfrac{b^2 + c^2}{2} \geq bc$. Miért? Ezeket felhasználva kapjuk, hogy: $\cos\alpha \geq \dfrac{1}{2}$. Ebből következik, hogy: $\alpha \leq 60°$. Tehát a feladat kérdésére a válasz: igaz.

3032. $\alpha \leq 30°$ következik a háromszög α szögére. Alkalmazzuk a koszinusztételt az a oldalra! Majd a kapott a^2-re való képletet helyettesítsük be a megadott egyenletbe. Ezután fejezzük ki a megfelelő szög koszinuszát, kapjuk, hogy: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + 3 \cdot c^2}{4 \cdot bc}$, ebből $\cos\alpha = \dfrac{b}{4 \cdot c} + \dfrac{3 \cdot c}{4 \cdot b}$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az előző összeg két pozitív tagjára! Kapjuk, hogy $\dfrac{\dfrac{b}{4 \cdot c} + \dfrac{3 \cdot c}{4 \cdot b}}{2} \geq \sqrt{\dfrac{b}{4 \cdot c} \cdot \dfrac{3 \cdot c}{4 \cdot b}} = \sqrt{\dfrac{3}{4^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Ebből $\cos\alpha \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, innen pedig $\alpha \leq 30°$ következik.

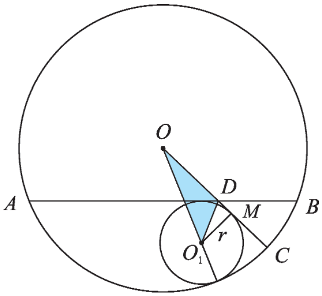
3033. $\alpha \leq 60°$ következik a háromszög α szögére. Alkalmazzuk a koszinusztételt a háromszög a oldalára! Majd az itt a^2-re kapott képletet helyettesítsük be a megadott egyenletbe. Innen kifejezve a megfelelő szöget, kapjuk, hogy: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2}{4 \cdot bc}$. Ebből $\cos\alpha = \dfrac{b}{4 \cdot c} + \dfrac{c}{4 \cdot b}$. Alkalmazzuk most az előző összeg két tagjára a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget! Kapjuk, hogy: $\dfrac{\dfrac{b}{4 \cdot c} + \dfrac{c}{4 \cdot b}}{2} \geq \sqrt{\dfrac{b}{4 \cdot c} \cdot \dfrac{c}{4 \cdot b}} = \dfrac{1}{4}$. Ebből $\cos\alpha \geq \dfrac{1}{2}$, innen pedig $\alpha \leq 60°$ következik.

Nehezebb feladatok

3034. Vegyük észre, hogy $a > b > c$. Miért? Ebből következik, hogy az α a legnagyobb szög ebben a háromszögben. Írjuk fel az a oldalra a koszinusztételt és az egyenletből fejezzük ki a szög koszinuszát! A rendezés és egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, ebből pedig $\alpha = 120°$ következik.

IV

3038.



3035. A háromszög legnagyobb oldala x^2+x+1. Miért? Írjuk fel a legnagyobb oldalra a koszinusztételt! $(x^2+x+1)^2 =$
$= (2x+1)^2 + (x^2-1)^2 - 2\cdot(2x+1)(x^2-1)\cdot\cos\gamma$.

Ebből $\cos\gamma = \dfrac{-2\left(x^3-x\right)-\left(x^2-1\right)}{2\cdot(2x+1)\left(x^2-1\right)} = -\dfrac{1}{2}$. Miért? Ebből következik, hogy $\alpha = 120°$.

3036. $t = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ területegység a háromszög területe.

3037. 44 egység a háromszög kerülete.

3038. $r = 2\cdot\sqrt{21} - 9 \approx 0{,}165$ egység a keresett kör sugara.

3039. $V_{max} = 8\cdot\sqrt{6}$ térfogategység a gúla maximális térfogata.

3040. 8 egység az e és f egyenesek távolsága.

A szinusztétel és a koszinusztétel alkalmazása

Alapvető feladatok

3041. $b \approx 33{,}52$ cm a másik oldal hossza, $f \approx 23{,}8$ cm a másik átló hossza. Írjunk fel egy koszinusztételt a paralelogramma ismeretlen oldalára! Kapjuk, hogy $b \approx 33{,}52$ cm. Majd írjunk fel egy szinusztételt az $a \approx 28$ cm, a b oldal és az $e = 57$ cm oldal alkotta háromszögre! Kapjuk, hogy a 28 cm-es oldallal szemközti szög $\delta = 20{,}1°$. Ezután könnyen megkaphatjuk a paralelogramma szögeit: $\approx 44{,}4°$, illetve $\approx 135{,}6°$. Az ismeretlen átlóra írjunk fel például egy újabb koszinusztételt!

3042. $\approx 5{,}43$ cm a másik oldal hossza, $\approx 24{,}47$ cm^2 a területe, $\approx 69{,}87°$ és $\approx 110{,}13°$ a szögei. Koszinusztétellel számíthatjuk az ismeretlen oldalt. Majd szinusztételt alkalmazva kaphatjuk a paralelogramma egyik szögét, majd ebből a másik szögét. Ezután számíthatjuk a paralelogramma területét.

3043. $\approx 7{,}53$ cm a kör sugara. Alkalmazzuk a koszinusztételt a megadott szöggel szemközti háromszögoldalra. Ebből kapjuk, hogy $\approx 10{,}136$ cm az adott szöggel szemközti húr. Majd használjuk fel az $a = 2\cdot R\cdot\sin\alpha$ változatát a szinusztételnek. Ebből kaphatjuk a sugarat.

3044. $\approx 79{,}89$ cm^2 a körszelet területe. Koszinusztétellel kaphatjuk a 15 cm-es oldallal szemközti szöget: $\gamma \approx 85{,}46°$. A szinusztétel $c = 2\cdot R\cdot\sin\gamma$ változatával kaphatjuk a kör sugarát: $R \approx 7{,}52$ cm. Számítsuk ki a megfelelő körcikk területét: $\approx 84{,}35$ cm^2, majd számítsuk ki a megfelelő háromszög területét: $t_\Delta = \dfrac{R^2\cdot\sin(2\cdot\gamma)}{2} \approx 4{,}46$ cm^2. Majd vonjuk ki a körcikk területéből a háromszög területét és megkapjuk a körszelet területét.

3045. ≈ 8 cm; ≈ 10 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 41{,}41°$; $\approx 55{,}77°$ a háromszög ismeretlen szögei. Írjuk fel az ismert $a = 12$ cm-es oldalra a koszinusztételt:
$12^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos 82{,}82°$. Másrészt tudjuk, hogy $b + c = 12$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! $b \approx 8$ cm; $c \approx 10$ cm, illetve fordítva. Írjuk fel a szinusztételt az a és a b oldalra. Ebből kapjuk a $b \approx 41{,}41°$ szöget és ebből a $\gamma \approx 55{,}77°$ szöget, illetve fordítva.

3046. ≈ 19 cm, ≈ 13 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 104{,}39°$; $\approx 41{,}5°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $a = 11$ cm, ekkor $b - c = 6$ cm a feltétel szerint. Írjuk fel a koszinusztételt az a oldalra! $11^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos 34{,}11°$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Kapjuk, hogy: $c \approx 13$ cm, és ebből $b \approx 19$ cm. Írjuk fel a szinusztételt az a és a b oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 75{,}61°$ vagy $\beta \approx 104{,}39°$. Az első lehetőség nem lehet. Miért? Ezért $\beta \approx 104{,}39°$, ebből $\gamma \approx 41{,}5°$.

3047. ≈ 14 cm; ≈ 23 cm; a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 26{,}2°$; $\approx 133{,}5°$ a háromszög ismeretlen szögei. A feltétel szerint $a + b = 37$. Másrészt írjuk fel a koszinusztételt az ismert oldalra: $11^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 20{,}3°$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! $a \approx 14$ cm; $b \approx 23$ cm, illetve fordítva. Alkalmazzuk a szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk az $\alpha \approx 26{,}2°$szöget, ebből pedig a $\beta \approx 133{,}5°$ szöget, illetve fordítva.

3048. ≈ 18 cm; ≈ 24 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 43{,}04°$; $\approx 65{,}52°$ a háromszög ismeretlen szögei. A feltételből: $a + b = 42$. Másrészt a koszinusztételt felírva az ismert oldalra: $25^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 71{,}44°$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Kapjuk, hogy $a \approx 18$ és $b \approx 24$, illetve fordítva. Írjuk fel a szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 43{,}04°$, ebből $\beta \approx 65{,}52°$, illetve fordítva.

3049. $\approx 7{,}4$ cm; $\approx 14{,}6$ cm; ≈ 11 cm a háromszög ismeretlen oldalai, $\approx 29{,}56°$; $\approx 103{,}27°$ a háromszög ismeretlen szögei. Először a $c = 2 \cdot R \cdot \sin\gamma$ összefüggéssel számítsuk ki a c oldalt: $c \approx 11$ cm. A feltétel szerint $a + b = 22$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra!
$11^2 \approx a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 47{,}17°$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! $a \approx 7{,}4$; $b \approx 14{,}6$, illetve fordítva. Írjuk fel, hogy $\alpha = 2 \cdot R \cdot \sin\alpha$, ebből kapjuk, hogy: $\alpha \approx 29{,}56°$, majd ebből $\beta \approx 103{,}27°$, illetve fordítva.

3050. ≈ 61 cm; ≈ 102 cm a háromszög többi oldalának a hossza, $\approx 33°23'$; $\approx 79°38'$ a háromszög többi szöge. Legyen $\gamma = 66°59'$ és $a = 109$ cm. Ekkor a $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ területképletből kapjuk, hogy $b \approx 61$ cm. Írjuk fel a koszinusztételt a háromszög c oldalára! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 102$ cm. Írjuk fel a szinusztételt a háromszög b és c oldalára! Ebből kapjuk, hogy $\beta \approx 33°23'$, ebből pedig $\alpha \approx 79°38'$.

3051. 1. megoldás: ≈ 84 cm a harmadik oldal hossza, $\approx 67{,}38°$; $\approx 36{,}87°$; $\approx 75{,}75°$ a háromszög szögei. $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$. Legyen $a = 80$; $b = 52$, ekkor a területképletből: $\gamma \approx 75{,}75°$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 84$. Írjuk fel a szinusztételt az a és c oldalakra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 67{,}38°$, ebből pedig $\beta \approx 36{,}87°$.
A **2. megoldás:** $\gamma \approx 104{,}25°$; $c \approx 105{,}6$ cm**,** $\approx 47{,}25°$; $\approx 28{,}5°$.

3052. ≈ 16 cm; ≈ 12 cm; $\approx 14{,}32$ cm a háromszög oldalai, $\approx 46{,}22°$; $\approx 74{,}29°$ a háromszög többi szöge. A feltétel szerint $a + b = 28$. A háromszög $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ területképletéből: $a \cdot b \approx 195$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Ebből $a \approx 16$ cm és $b \approx 12$ cm, illetve fordítva. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből $c \approx 14{,}32$. Írjuk fel a szinusztételt az a és c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\alpha \approx 46{,}22°$ ebből pedig $\beta \approx 74{,}29°$, illetve fordítva.

3053. ≈ 100 cm; ≈ 65 cm; ≈ 105 cm a háromszög oldalainak hossza, $\approx 67°23'$; $\approx 36°52'$ a háromszög többi szöge. A feltételből $a - b = 35$ és $\gamma = 75°45'$. Ekkor a háromszög trigonometrikus területképletéből $a \cdot b \approx 6500$. Oldjuk meg az egyenletrendszert! Ebből $a \approx 100$ és $b \approx 65$. Írjuk fel a koszinusztételt a c oldalra! Ebből kapjuk, hogy $c \approx 105$. Írjunk fel egy szinusztételt a b és c oldalakra! Ebből kapjuk, hogy: $\beta \approx 36°52'$, ebből pedig $\alpha \approx 67°23'$.

3054. $\approx 8{,}85$ cm; $\approx 6{,}64$ cm; 7 cm a háromszög oldalai, $\approx 80{,}91°$; $\approx 47{,}77°$ a háromszög ismeretlen szögei. Legyen $a = 7$, $\alpha = 51{,}32°$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt! Ebből $\dfrac{b}{c} = \dfrac{4}{3}$.
Ezért legyen $b = 4x$ és $c = 3x$. Írjuk fel az a oldalra a koszinusztételt!
$7^2 = (4x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3x \cdot \cos 51{,}32°$. Ebből $x \approx 2{,}2135$, s innen $b \approx 8{,}85$; $c \approx 6{,}64$. Írjuk fel a szinusztételt a c és az a oldalra! Ebből kapjuk, hogy $\gamma \approx 47{,}77°$, ebből pedig $\beta \approx 80{,}91°$.